درس هشتم : یک موضوع متفرقه : دو مثال ازیکسانی گروه هاباکاربردهای مهم درفیزیک

۱ مقدمه

به عنوان استراحت هم که شده دراین درس کمی درجاده ای که برای پیشروی دردرس نظریه گروه پیموده ایم توقف می کنیم و به موضوعی می پردازیم که درفیزیک کاربردهای فراوان دارد. می خواهیم به دونمونه مهم ازیکسانی بین گروه ها بپردازیم که ازنظرفیزیکی اهمیت دارند.
این دویکسانی بین گروه دوران $SO(3)$ و گروه $SU(2)/Z_2$ ازیک طرف و بین گروه لورنتز $SO(1,3)$ و گروه $SL(2,C)$ ازطرف دیگراست.

۲ یکسانی گروه های $SU(2)/Z_2$ و $SO(3)$

می دانیم که گروه $SO(3)$ گروه دوران های فضای سه بعدی اقلیدسی است. هرگاه $A\in SO(3)$،یک دوران و $\vec{r}\in R^3$ یک بردارسه بعدی باشد آنگاه

$$\vec{r'}=A\vec{r} \tag{1}$$

دوران یافته $\vec{r}$ است. ازطرف دیگر می خواهیم نشان دهیم که دوران های فضای سه بعدی را با ماتریس های $SU(2)$ که دوبعدی هستند نیز می توان انجام داد. برای اینکه این نتیجه به ظاهرعجیب را بفهمیم به ترتیب زیر پیش می رویم: به ازای هربردار $\vec{r}=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$، ماتریس P را به شکل زیرتعریف می کنیم:

$$P:=\begin{pmatrix} z & x-iy\\ x+iy & -z\end{pmatrix}\equiv x_i\sigma_i=\vec{r}\cdot\vec{\sigma}. \tag{2}$$

که دررابطه آخر ازقرارداد جمع روی اندیس های تکراری استفاده شده است و $x_1=x, x_2=y, x_3=z$.

این ماتریس خاصیت های زیررادارد:

الف: هرمیتی است.

ب : بدون رد است.

ج : $detP = -\vec{r}\cdot\vec{r}$.

حال باماتریس $U \in SU(2)$ تبدیل زیر را روی این ماتریس انجام می دهیم:

$$P' = UPU^\dagger \tag{3}$$

حال خواننده می تواند براحتی تحقیق کند که ماتریس P' نیزدارای همان خاصیت های الف تا ج است. چنین ماتریسی دقیقاً همان فرمی را دارد که دررابطه (2) آمده است. بنابراین این ماتریس را نیزمی توان به یک برداربا‌همان اندازه نسبت داد.یعنی می توان نوشت :

$$P' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} \equiv x'_i\sigma_i = \vec{r'}\cdot\vec{\sigma}. \tag{4}$$

بنابراین ماتریس یکانی U بردار سه بعدی r را به بردار r' باهمان اندازه تبدیل می کند. ضمناً اگر U نزدیک به ماتریس واحد باشد، r نیزنزدیک r' خواهد بود. بنابراین U واقعاً یک دوران ایجادمی کند. این دوران بایک ماتریس $A \in SO(3)$ انجام می شود. یعنی

$$r' = Ar \tag{5}$$

بنابراین به هرماتریس $U \in SU(2)$ می توانیم یک ماتریس $A \in SO(3)$ نسبت بدهیم که همان تبدیل را روی بردارهای سه بعدی اعمال می کند. حال فرض کنیدکه بعداز تبدیل U تبدیل U' رااعمال کنیم که ماتریس متناظرباآن در $SO(3)$، A' است. دراین صورت بردار r' تبدیل به بردار r'' می شود وداریم:

$$P' = UPU^\dagger \qquad P'' = U'P'U'^\dagger \tag{6}$$

$$r' = Ar \qquad r" = A'r' \tag{7}$$

از دورابطه (6) نتیجه می گیریم

$$P'' = U'(UPU^\dagger)U'^\dagger = (U'U)P(U'U)^\dagger. \tag{8}$$

یعنی دوران مرکب با ماتریس $U'U$ انجام می شود. ازرابطه (7) نیزبدست می آوریم

$$r'' = A'Ar, \tag{9}$$

که به این معناست که ماتریس متناظربا $A'A \in SO(3)$ ماتریس $U'U \in SU(2)$ است. درنتیجه این نگاشت یک همسانی از $SU(2)$ به سوی $SO(3)$ است. اگردقیق تر نگاه کنیم این رابطه یک رابطه یک به یک نیست زیرا U و $-U$ هردویک دوران ایجاد می کنند. بنابراین به هرمجموعه دوتاییِ $\{U, -U\}$ یک عضو از گروه $SO(3)$ نسبت داده می شود. ولی این دقیقاً به این معناست که یک یکسانی بین گروه خارج قسمت $SU(2)/Z_2$ و $SO(3)$ برقراراست . یعنی

$$SU(2)/Z_2 \approx SO(3). \tag{10}$$

برای اینکه رابطه صریح $U(A)$ را بدست آوریم می نویسیم:

$$U(x_i\sigma_i)U^\dagger = x'_i\sigma_i \equiv A_{ij}x_j\sigma_i \tag{11}$$

طرفین این رابطه را درσ_k ضرب می کنیم:

$$tr(\sigma_k U x_i \sigma_i U^\dagger) = tr(\sigma_k A_{ij} x_j \sigma_i) \tag{12}$$

حال ازرابطه $tr(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}$ استفاده می کنیم و بدست می آوریم:

$$A_{jk} = \frac{1}{2} tr(\sigma_j U \sigma_k U^\dagger). \tag{13}$$

این رابطه به طور صریح بیان می کند که درایه های ماتریس A چگونه از ماتریس U بدست می آیند.
می توان پرسید که یک ماتریس U واقعاً چه دورانی انجام می دهد، این دوران حول کدام محور وبه اندازه چه

زاویه ای است. برای پاسخ به این سوال دقت می کنیم که یک ماتریس یکانی دودردو را می توان به صورت زیرنوشت:

$$U = e^{i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} \equiv \cos\frac{\theta}{2}I + i\sin\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}. \tag{14}$$

که درآن $\hat{n}$ یک برداریکه است . ضریب $1/2$ برای راحتی بعدی درکنار θ قرارداده شده است. حال از این استفاده می کنیم که ماتریس هرمیتی P را می توان به صورت $P = \vec{r}\cdot\vec{\sigma}$ نوشت و از این اتحاد استفاده می کنیم که برای هردوبردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$

$$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})I + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}. \tag{15}$$

کمی محاسبه نشان می دهد که ماتریس $P' = UPU^\dagger$ به شکل زیرقابل بازنویسی است:

$$P' = \vec{r'}\cdot\vec{\sigma}, \tag{16}$$

که درآن

$$\vec{r'} = \cos\theta\ \vec{r} + \sin\theta\ \vec{r}\times\hat{n} + (1-\cos\theta)(\hat{n}\cdot\vec{r})\ \hat{n}. \tag{17}$$

ولی هم چنان که درتمرین های سری چهارم نشان داده اید این عبارت دقیقاً به این معنی است که بردار $\vec{r}$ حول محور $\hat{n}$ به اندازه زاویه θ چرخیده است. بنابراین ماتریس $U = e^{i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}$ دورانی حول محور $\hat{n}$ به اندازه زاویه θ انجام می دهد.

۳ یکسانی گروه های $SO(1,3)$ و $SL(2,C)/Z_2$

گروه $SO(1,3)$ گروه تبدیلات ویژه لورنتز است که روی فضازمان ۳+۱ بعدی اثر می کند. به ازای هرنقطه $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ درفضازمان ماتریس هرمیتی زیرراتشکیل می دهیم:

$$P = x^\mu\sigma_\mu \equiv \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

که دراینجا

$$(\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = (I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z). \tag{19}$$

ماتریس P هرمیتی است ، و دترمینان آن برابراست با $x^\mu x_\mu$ ، حال به ازای هر $S \in SL(2,C)$ تبدیل زیررا انجام می دهیم

$$P \longrightarrow P' := SPS^\dagger. \tag{20}$$

حال براحتی می توان فهمید که ماتریس P' نیزهرمیتی است . دترمینان آن نیزبرابربا دترمینان P است زیرا دترمینان S برابربا یک است. بنابراین می توان ماتریس P' را نیز بایک نقطه مثل $(x'^0, x'^1, x'2, x'^3)$ که همان طول مینکوسکی را دارد متناظرکرد، یعنی

$$P' = x'^\mu\sigma_\mu =\equiv \begin{pmatrix} x'^0 + x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & x'^0 - x'^3 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

که درآن $x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu$. بنابراین x' بایک تبدیل لورنتز Λ از x بدست می آید وداریم:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \tag{22}$$

حال شبیه به آنچه که درمورد گروه $SU(2)$ داشتیم دراینجا هم اگر داشته باشیم

$$\begin{aligned} &P' = SPS^\dagger \quad \longrightarrow x' = \Lambda x, \\ ,\qquad &P" = S'P'S'^\dagger \longrightarrow x'' = \Lambda' x' \end{aligned} \tag{23}$$

وازآنجا

$$P'' = (S'S)P(S'S)^\dagger, \qquad x'' = (\Lambda'\Lambda)x. \tag{24}$$

بنابراین نگاشتی که به هرماتریس $S \in SL(2,C)$ یک تبدیل $\Lambda \in SO(1,3)$ نسبت می دهد یک همسانی است. ازآنجا که تبدیل های S و $-S$ هردو یک تبدیل لورنتز را ایجادمی کنند نتیجه می گیریم که یکسانی زیربرقراراست:

$$SO(1,3) \equiv SL(2,C)/Z_2. \tag{25}$$

برای اینکه رابطه صریح S, Λ را بدست آوریم می نویسیم:

$$S(x^\mu\sigma_\mu)S^\dagger = x'^\mu\sigma_\mu \equiv \Lambda^\mu_\nu x^\nu\sigma_\mu. \tag{26}$$

حال ماتریس های $\overline{\sigma}_\mu$ را به ترتیب زیرتعریف می کنیم:

$$(\overline{\sigma}_0, \overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \overline{\sigma}_3) = (I, -\sigma_x, -\sigma_y, -\sigma_z). \tag{27}$$

صحت رابطه زیررا با کمی محاسبه می توان تحقیق کرد:

$$tr(\overline{\sigma}_\mu \sigma_\nu) = 2\eta_{\mu,\nu}. \tag{28}$$

از رابطه (26) بدست می آوریم:

$$S\sigma_\nu S^\dagger = \Lambda^\mu_\nu \sigma_\mu, \tag{29}$$

وپس از ضرب کردن در $\overline{\sigma}_\alpha$ و محاسبه ردّ طرفین خواهیم داشت:

$$tr(\overline{\sigma}_\alpha S\sigma_\nu S^\dagger) = \Lambda^\mu_\nu tr(\overline{\sigma}_\alpha \sigma_\mu), \tag{30}$$

ویا

$$tr(\overline{\sigma}_\alpha S\sigma_\nu S^\dagger) = \Lambda^\mu_\nu 2\eta_{\alpha\mu} = 2\Lambda_{\alpha\nu}. \tag{31}$$

بنابراین بادردست داشتن ماتریس S می توانیم Λ را به طور یکتا پیداکنیم:

$$\Lambda^\alpha_{|m} = \frac{1}{2} tr(\overline{\sigma}^\alpha S\sigma_\nu S^\dagger). \tag{32}$$

حال توجه می کنیم که هرماتریس کلی $S \in SL(2, C)$ را می توان به صورت زیرنوشت:

$$S = e^{(\vec{a}+i\vec{b})\cdot\vec{\sigma}}. \tag{33}$$

هرگاه $\vec{a} = 0$، S یکانی بوده وچنانکه دربخش قبلی دیدیم نشان دهنده یک دوران است که محورآن بردارِ یکه $\hat{b}$ واندازه دوران آن برابربا $\theta := |\vec{b}|$ است. هرگاه $\vec{b} = 0$، S نشان دهنده یک خیز لورنتزی درراستای $\hat{a}$ با پارامترخیز $\phi := |\vec{a}|$ و یا سرعت $v := \tanh\phi$ است. درحالت کلی اثریک تبدیل کامل لورنتزی را که هم شامل دوران و هم شامل خیز است بااستفاده از تبدیلات $SL(2, C)$ بدست آورد. راه آن این است که توجه کنیم که S را می توان به شکل زیرنوشت:

$$S = e^{\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = e^{\phi\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} \tag{34}$$

که درآن $\vec{n} = \vec{a} + i\vec{b}$ و $\phi = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2} = \sqrt{\vec{n}\cdot\vec{n}^*} =: \phi$ و $\hat{n} = \frac{\vec{n}}{\phi}$. حال می دانیم چنین ماتریسی را همواره می توان به شکل زیرنوشت:

$$S = e^{\phi\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cosh\phi\, I + \sinh\phi\ \hat{n}\cdot\sigma. \tag{35}$$

این رابطه شکل صریح یک تبدیل لورنتز را تعیین خواهد کرد. درتمرین ها با مثال ها وکاربردهایی از این رابطه آشناخواهیم شد.